

Eigenschaften messbarer Funktionen

- I. Zerlegung in einfache Anteile
- II. Stetigkeit auf „großen Bereichen“
 “ “ “
- III. Konvergenzverhalten von Folgen

ad I.

Satz 24.2 : Zerlegung messbarer
Funktionen ≥ 0

Sei λ ein Maß auf der Menge X

und $f: X \rightarrow [0, \infty]$ sei

-261-

λ -messbar. Zu jeder Folge $\{r_k\}$

mit

$$r_k > 0, \quad r_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = \infty$$

gibt es eine Folge $\{A_k\}$ λ -mess-
barer Teilmengen A_k von X mit

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \chi_{A_k}$$

im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Spezialfall:

$$r_k := \frac{1}{k}$$

Beweis: O.E. $r_k = \frac{1}{k}$. Setze

rekursiv $A_1 := \{x \in X : f(x) \geq 1\}$,

$$k \geq 2: A_k := \left\{ x \in X: f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \right\}$$

Sei $x \in X$ fest. Wir zeigen:

$$f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) \quad (*)$$

Fall 1: $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

(*) klar wegen $f(x) \geq 0$

Fall 2: $x \in A_k$ für nur endlich viele k

$$\text{Sei } k_0 := \max \{ k \in \mathbb{N}: x \in A_k \} \Rightarrow$$

$$x \in A_{k_0} \xrightarrow{\text{Def von } A_{k_0}}$$

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{k_0} + \sum_{j=1}^{k_0-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \dots$$

Fall 3 : $x \in A_{k_m}$ für eine Folge $k_m \rightarrow \infty$

Sei $N \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k_m \geq N$, also

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{k_m} + \sum_{j=1}^{k_m-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

$\uparrow$
 $x \in A_{k_m}$, Def. von A_{k_m}

$$= \sum_{j=1}^{k_m} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \geq \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

Mit $N \rightarrow \infty$ folgt $(*)$.

Noch zu zeigen

$$(**) \quad f(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

Fall 1 : $f(x) = \infty$

$$\Rightarrow x \in A_k \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Fall 2 : $f(x) < \infty$

Dann ist

$$\# \{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} = \infty.$$

Andernfalls : $x \in A_k$ für $k \geq n_0$
mit n_0 passend

$$\Rightarrow f(x) \underset{(*)}{\geq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$$

$$\geq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

im Widerspruch zu $f(x) < \infty$.

Für jedes n mit $x \notin A_n$ ist

$$0 \underset{(*)}{\leq} f(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

$$\leq \frac{1}{n}$$

↑
 $x \notin A_n$

und da es ∞ viele $\sqrt[n]{n}$ solcher gibt, folgt die Behauptung mit „ $n \rightarrow \infty$ “.



ad II.

Der Satz von Lusin

-266-

Satz 24.3 : Sei λ ein Borel-regulä-
res Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$

sei λ -messbar. Es sei $A \in \mathcal{M}_\lambda$

mit $\lambda(A) < \infty$!

[z.B. $\lambda = \mathcal{L}^n$, $A = \text{Kugel}$]

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine
kompakte Menge K mit

$$K \subset A, \quad \lambda(A - K) < \varepsilon,$$

so dass $f|_K : K \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig
ist.

Bem: 1) Das bedeutet nicht die Stetigkeit von φ an jeder Stelle $x_0 \in K$! Es gilt

$$\underline{\text{nur}} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(x_m) = \varphi(x_0)$$

für jede Folge $\{x_m\} \in K$ mit $x_m \rightarrow x_0$.

Da aber der "Rest" $A-K$ dem Maße nach klein ist, reicht diese Info oft aus.

2.) allgemeinere Varianten: Federer, 2.3.5

Beweis: Schreibe für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\underline{\text{Bildraum}} \quad \mathbb{R}^M = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{i,j}$$

mit disjunkten Borel-Mengen $B_{i,j}$

(d.h.: $l \neq k \implies B_{i,l} \cap B_{i,k} = \emptyset$),

$$\text{diam } B_{i,j} < \frac{1}{i}$$

(Konkret: Würfelzerlegung von $\mathbb{R}^M$; die Seiten werden dabei jeweils nur einem Würfel zugeschlagen) Die Mengen

$$A_{i,j} := \varphi^{-1}(B_{i,j}) \cap A$$

sind λ -messbar (und disjunkt in j) mit

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \quad \forall i$$

Wegen $\lambda(A) < \infty$ ist $\nu := \lambda|_A$

$\mathbb{R}^M$

B_{ij}



$\mathbb{R}^n$

A_{ij}

A

ein Radon-Maß

Zusatz

-269-

$\implies$
zu 23.5

$\exists$ kompakte Mengen $K_{ij} \subset A_{ij}$ mit

$$\nu(A_{ij} - K_{ij}) \leq \varepsilon 2^{-(i+j)}$$

bei gegebenem $\varepsilon > 0$. $\implies (i \text{ beliebig})$

$$\nu\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right) =$$

$$\nu\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\right)$$

$$= \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} [A_{i,j} - K_{ij}]\right) \leq$$

-270-

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| (A_{i,j} - K_{i,j}) \| \leq \varepsilon 2^{-i} \quad (*)$$

beachte: $\lambda(A) < \infty$, also

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda(A - \bigcup_{j=1}^N K_{i,j}) = \lambda(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{i,j})$$

(gemäß $(*)$)

Also gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $N(i)$

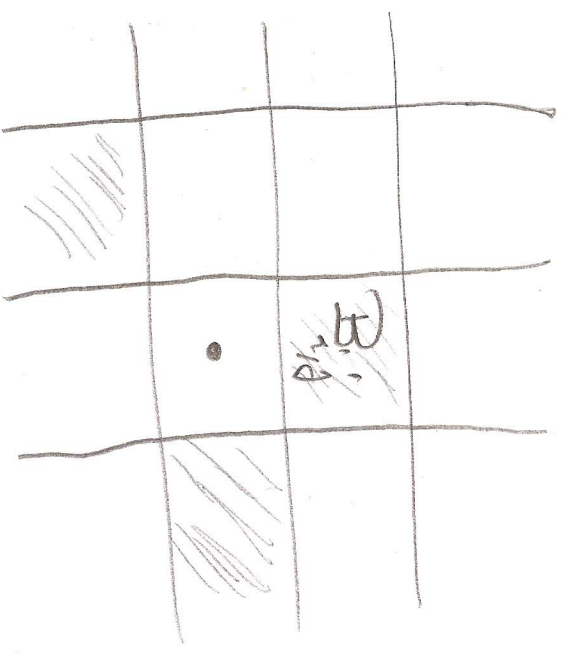
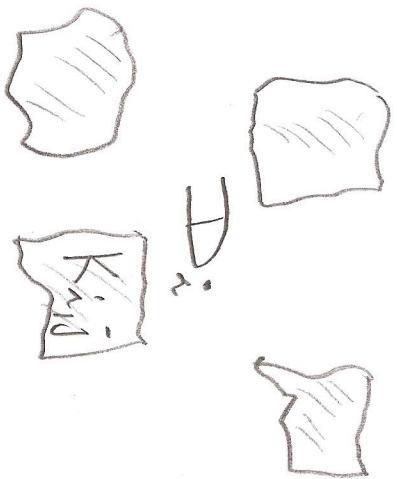
mit

$$(**) \quad \lambda(A - \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{i,j}) \leq \underline{\underline{2 \cdot \varepsilon \cdot 2^{-i}}}$$

Die Mengen

$$D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{i,j}$$

sind kompakt.



Sei $g_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g_i(x) \equiv b_{i,j} \text{ auf } K_{i,j}$$

wo $b_{i,j} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt ist.

beachte : $K_{1,i}, \dots, K_{M(i),i}$ sind
disjunkte, kompakte Mengen, haben also
positiven Abstand $\Rightarrow$ g_i stetig

Außerdem : $|f(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{i}$
auf D_i

denn: $x \in D_i \implies x \in K_{i,j}$

für ein $j = 1, \dots, N(i)$; also ist

$$x \in A_{i,j} \xRightarrow{\text{Def.}} \varphi(x) \in B_{i,j} \implies$$

$$|\varphi(x) - g_i(x)| = |\varphi(x) - b_{i,j}| \leq$$

$$\text{diam}(B_{i,j}) < \frac{1}{i}.$$

Schließlich, sei

$$K := \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$$

$$\implies K \subset A \text{ kompakt};$$

$$\lambda(A - K) = \lambda\left(A - \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\right) =$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [A - D_i]\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A - D_i)$$

$$\leq 2\varepsilon \quad \text{und}$$

(**)

$$g_i \Rightarrow \Rightarrow f \text{ auf } \underline{\underline{K}}$$

Also ist $f|_K$ stetig. $\square$

Korollar: Sei λ ein Borel-reguläres
Maß auf $\mathbb{R}^n$. A sei aus $\mathcal{M}_\lambda$
mit $\lambda(A) < \infty$. Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow$
 $\mathbb{R}^M$ λ -messbar, so findet
man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige
Funktion $\overline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$ mit
 $\lambda(\{x \in A: f(x) \neq \overline{f}(x)\}) < \varepsilon$.